ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517. 53

В.Г. РЯБЫХ, Г.Ю. РЯБЫХ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ЯВНОМ ВИДЕ ДЛЯ ШИРОКОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НАД ПРОСТРАНСТВОМ H_1

В работе найдены в явном виде экстремальные функции для широкого класса функционалов над пространством Харди H_1.

Ключевые слова: *пространство Харди, экстремальная функция, линейный функционал.*

Пусть ω – существенно ограниченная функция на $T=\{t:|t|=1\}$, и H_p – пространство Харди в единичном круге. Обозначим через l_ω линейный функционал над H_1, определяемый формулой (всюду в дальнейшем $t=e^{i\theta}, \zeta = e^{i\varphi}$):

$$l_\omega(X)=\frac{1}{2\pi}\int_T X(t)\overline{\omega(t)}d\theta, X\in H_1^0, \omega\in L_\infty, \overline{\omega}\notin H_\infty. \qquad (1)$$

Здесь H_1^0 - множество функций из H_1, равных нулю в начале координат.

Назовем функцию $f\in H_1^0$ экстремальной функцией для функционала l, если $l(f)=\|l\|, \|f\|=1$. Будем считать $\chi\in H_\infty$ функцией наилучшего приближения для $\overline{\omega}\in L_\infty$, если

$$vrai\max\left\|\overline{\omega}(\zeta)-\chi(\zeta)\right\|_{L_\infty} = \inf_{a\in H_\infty} vrai\max\left\|\overline{\omega}(\zeta)-a(\zeta)\right\|_{L_\infty} = dist(\overline{\omega}, H_\infty).$$

Известно, что экстремальная функция существует не у любого функционала над H_1, в то же время наилучшее приближение $\overline{\omega}$ реализуется всегда.

Старая проблема, стоящая со времен Э.Ландау (1916 год), заключается в том, чтобы найти условия существования и единственности экстремальной функции в пространстве H_1, а также указать эту функцию.

Первая часть задачи была решена одним из авторов в [1]. Экстремальные функции для функционала (1) с рациональными ω были найдены в [2].

В данной статье будут указаны экстремальные функции для $\omega\in Lip\alpha\cap H_\infty$.

Нам понадобятся следующие теоремы.

I. (ТЕОРЕМА 1 из [1])

Пусть Φ $(\|\Phi\|_{H_2}=1)$ и $\Psi\in H_2$ *- решения системы уравнений:*

$$\begin{cases} \overline{\Phi(t)} = \lambda t\Psi(t)\overline{\omega}(t) + ta_1(t) \\ \overline{\Psi(t)} = \lambda t\Phi(t)\overline{\omega}(t) + ta_2(t) \end{cases} \text{ для п.в. } t \text{ из } T. \quad (2)$$

(a_1 и a_2 - некоторые функции из H_2, а λ – вещественное число.) Тогда

1^0. При $\lambda = 1/\|l\|$ существуют такие решения системы (2), что:

1) для п.в. $t \in T$ выполняется $|\Phi(t)| = |\Psi(t)|$,

2) экстремальную функцию функционала (1) можно представить в виде $f(t) = t|\Phi(t)||\Psi(t)|$.

2^0. Если Φ ($\|\Phi\|_{H_2} = 1$) и $\Psi \in H_2$ – решения системы (2), то:

1) для п.в. $t \in T$ выполняется $|\Phi(t)| = |\Psi(t)|$,

2) наименьшее положительное λ равно $1/\|l\|$,

3) $t\Phi\Psi = f$ - экстремальная функция.

II. (ТЕОРЕМА 3 из [1])

Обозначим

$$T(y)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_T y(t)\overline{\omega}(t)\frac{\omega^+(t) - \omega^+(\zeta)}{t - \zeta}dt \quad (3)$$

(здесь интеграл понимается в смысле главного значения).

Тогда оператор T:

1^0) при $\omega \in L_\infty$ непрерывно отображает L_2 в H_2;

2^0) является положительным оператором над пространством H_2;

3^0) если $\omega \in VMO \cap L_\infty$, то оператор T является компактным оператором из L_2 в H_2.

III. (ТЕОРЕМА 4 из [1])

Если у функционала (1) существует экстремальная функция, то Φ и Ψ из теоремы I являются решениями интегрального уравнения

$$Y(\zeta) = \frac{\lambda^2}{2\pi i}\int_T \overline{\omega}(t)\frac{\omega^+(t) - \omega^+(\zeta)}{t - \zeta}Y(t)dt, \quad (4)$$

в котором $\lambda = 1/\|l\|$, $\omega(t) = \omega^+(t) - \omega^-(t)$, а интеграл понимается в смысле главного значения.

IV. (ТЕОРЕМА 1 из [2].)

Пусть функция Φ ($\|\Phi\|_{H_2} = 1$) является решением уравнения (4), соответствующим характеристическому числу $\lambda^2 = 1/\|l\|^2$, а $\overline{t\Psi}$ - проекция $\lambda\Phi\overline{\omega}$ на $\overline{H_2^0}$, тогда:

1) *экстремальная функция существует и представима в виде* $f = \zeta\, \Phi \Psi$; $1/\lambda^2$ *равно наименьшему характеристическому числу оператора T;*
2) $\|l\|^2 = \|T\| = r(T)$, *где* $r(T)$ *- спектральный радиус оператора T.*

Начнем с вывода нового, более общего, условия существования экстремальной функции (ранее в [3, 4] было доказано, что она существует при $\omega \in H_\infty + C$).

ТЕОРЕМА 1. Если в (1) $\omega \in VMO$, то существует экстремальная функция.

Доказательство. Для случая, когда $\omega \in VMO$, но $\notin L_\infty$, будем пользоваться для представления функционала $l \in H_\infty^*$ формулой

$$l(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_T P_n(t)\overline{\omega}\, d\theta\, , \|x - P_n\|_{H_1} \to 1.$$

Так как $\omega \in VMO$, то существует последовательность $\{\omega_n\}$ непрерывных на T функций, таких что $\|\omega - \omega_n\|_{BMO} \to 0$ [5] (замечание после доказательства теоремы 5.2 из главы VI).

Пусть теперь $\{f_n\}, \|f_n\| \le 1,$ - последовательность многочленов, для которой выполняется $l(f_n) \to \|l\|.$ На основании компактности в себе относительно равномерной сходимости функций пространства H_1 внутри единичного круга выберем из $\{f_n\}$ подпоследовательность, равномерно сходящуюся на упомянутом множестве. Будем считать, что сама $\{f_n\}$ сходится к f. Можно доказать, что $\|f\| \le 1$.

Обозначим $l_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_T x\overline{\omega_n}\, d\theta\, , x \in H_1^0.$ Имеем

$$|l(f_m) - l(f)| = |l(f_m - f)| \le |(l - l_n) f_m| + |(l - l_n) f| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_T (f_m - f)\overline{\omega_n}\, dt \right| \quad .(5)$$

По теореме Фeффермана ([4], гл.VI, теорема 4.4):

$$|(l - l_n) f_m| \le C\|\omega - \omega_n\|_{BMO} < C\varepsilon\ ,$$
$$|(l - l_n) f| \le C\|\omega - \omega_n\|_{BMO} < C\varepsilon$$

при фиксированном $n^* > N$ и произвольном $\varepsilon > 0.$

В силу теоремы о слабой сходимости граничных значений функции, принадлежащих H_1 , из равномерной сходимости $\{f_n\}$ к f внутри единичного круга вытекает ([5], лемма 4.1), что для любой функции $\varphi \in C$ выполняется $\int_T f_m \varphi\, dt \to \int_T f\varphi\, dt.$ Это означает, что и третье слагаемое из (5) может быть сделано меньше ε , откуда $l(f) = \lim_{n\to\infty} l(f_n) = \|l\|.$

Теорема доказана.

Теперь приступим к построению в явном виде экстремальных функций для функционалов вида (1), образованных липшицевскими функциями ω. Заметим, что в [2] вычисляются экстремальные функции для функционалов с рациональными ω.

Введем следующие обозначения (в дальнейшем будем придерживаться символики из [6]):

$$\Delta_{\xi_k} = \Delta_{\sigma_k} = \left[e^{(k-1)\frac{2\pi i}{n}}, e^{k\frac{2\pi i}{n}}\right], k = 1,2,\ldots n, \left|\Delta_{\xi_k}\right| = \left|\Delta_{\sigma_k}\right| = \Delta, \zeta_k \in \Delta_{\xi_k}, t_j \in \Delta_{\sigma_j}.$$

Определим функцию $K(\varsigma, t)$ следующим образом:

$$K(\zeta, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\omega(\zeta) - \omega(t)}{\zeta - t}\overline{\omega}(t)t, z \neq t. \\ 0, z = t \end{cases}$$

Очевидно, что $K(\varsigma, t)$, за исключением одной точки, является граничным значением функции, аналитической по первой переменной в единичном круге, и имеет слабую особенность на окружности. Положим,

$$K\begin{pmatrix} \zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_p t_1 t_2\ldots t_n \\ \tau_1\tau_2\ldots\tau_p t_1 t_2\ldots t_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} K(\zeta_1,\tau_1)\ldots & K(\zeta_1,\tau_\alpha)\ldots & K(\zeta_1,\tau_p) & K(\zeta_1,t_1)\ldots & K(\zeta_1,t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ K(\zeta_\beta,\tau_1)\ldots & K(\zeta_\beta,\tau_\alpha)\ldots & K(\zeta_\beta,\tau_p) & K(\zeta_\beta,t_1)\ldots & K(\zeta_\beta,t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ K(\zeta_p,\tau_1)\ldots & K(\zeta_p,\tau_\alpha)\ldots & K(\zeta_p,\tau_p) & K(\zeta_p,t_1)\ldots & K(\zeta_p,t_n) \\ K(t_1,\tau_1)\ldots & K(t_1,\tau_\alpha)\ldots & K(t_1,\tau_p) & K(t_1,t_1)\ldots & K(t_1,t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ K(t_n,\tau_1)\ldots & K(t_n,\tau_\alpha)\ldots & K(t_n,\tau_p) & K(t_n,t_1)\ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $K\begin{pmatrix} \zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_p t_1 t_2\ldots t_n \\ \tau_1\tau_2\ldots\tau_p t_1 t_2\ldots t_n \end{pmatrix}$, являясь суммой произведений граничных значений функций, аналитических по переменным ς_j, сама будет такой же.

Как обычно, пусть $t_k = e^{i\theta_k}$,

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}\int_{P^n} K\begin{pmatrix} t_1 t_2\ldots t_n \\ t_1 t_2\ldots t_n \end{pmatrix} d\theta(\theta_1\ldots\theta_n);$$

$$D(\zeta, \tau, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{n!}\int_{P^n} K\begin{pmatrix} t_1 t_2\ldots t_n\zeta \\ t_1 t_2\ldots t_n\tau \end{pmatrix} d\theta(\theta_1\ldots\theta_n). \quad (6)$$

Здесь и далее $P^n = [0,2\pi]\times[0,2\pi]\times\ldots\times[0,2\pi]$.

Положим:

$$B_n^p = B_n\begin{pmatrix}\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_p\\ \tau_1\tau_2\ldots\tau_p\end{pmatrix} = \int\limits_{P^n} K\begin{pmatrix}\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_p t_1 t_2\ldots t_n\\ \tau_1\tau_2\ldots\tau_p t_1 t_2\ldots t_n\end{pmatrix} d\theta\,(\theta_1\ldots\theta_n)\,;$$

$$B_0\begin{pmatrix}\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_p\\ \tau_1\tau_2\ldots\tau_p\end{pmatrix} = K\begin{pmatrix}\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_p\\ \tau_1\tau_2\ldots\tau_p\end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Теперь миноры Фредгольма определим с помощью ряда

$$D_p(\vec{\zeta}\,\vec{\tau}) = D\begin{pmatrix}\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_p\\ \tau_1\tau_2\ldots\tau_p\end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^{n+p-1}}{n!}\int\limits_{P^n} B_n\begin{pmatrix}\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_p\\ \tau_1\tau_2\ldots\tau_p\end{pmatrix} d\theta\,(\theta_1\ldots\theta_n). \qquad (8)$$

Заметим, что ряд (8) сходится равномерно относительно ζ_j, τ_j и, следовательно, D_p есть граничное значение функции, аналитической по каждой из переменных ζ_k.

Следующие теоремы почти дословно повторяют доказательства теорем из [6] (с. 62-71).

ТЕОРЕМА 2. Миноры Фредгольма удовлетворяют следующим интегральным уравнениям ($t = e^{i\theta}$) :

$$D\left(\begin{matrix}\zeta_1\ldots\zeta_p\\ \tau_1\ldots\tau_p\end{matrix}\middle|\lambda\right) = \sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+\beta}K(\zeta_\beta,\tau_\alpha)D\left(\begin{matrix}\zeta_1\ldots\zeta_{\beta-1}\zeta_{\beta+1}\ldots\zeta_p\\ \tau_1\ldots\tau_{\alpha-1}\tau_{\alpha+1}\ldots\tau_p\end{matrix}\middle|\lambda\right) +$$
$$\lambda\int_0^{2\pi}K(\zeta_\beta,t)D\left(\begin{matrix}\zeta_1\ldots\zeta_{\beta-1}t\zeta_{\beta+1}\ldots\zeta_p\\ \tau_1\ldots\tau_{\beta-1}\tau_\beta\tau_{\beta+1}\ldots\tau_p\end{matrix}\middle|\lambda\right)d\theta,\ \beta = 1,2,\ldots,p. \qquad (9)$$

$$D\left(\begin{matrix}\zeta_1\ldots\zeta_p\\ \tau_1\ldots\tau_p\end{matrix}\middle|\lambda\right) = \sum_{\beta=1}^{p}(-1)^{\alpha+\beta}K(\zeta_\beta,\tau_\alpha)D\left(\begin{matrix}\zeta_1\ldots\zeta_{\beta-1}\zeta_{\beta+1}\ldots\zeta_p\\ \tau_1\ldots\tau_{\alpha-1}\tau_{\alpha+1}\ldots\tau_p\end{matrix}\middle|\lambda\right) +$$
$$\lambda\int_0^{2\pi}K(t,\tau_\alpha)D\left(\begin{matrix}\zeta_1\ldots\zeta_{\alpha-1}\zeta_\alpha\zeta_{\alpha+1}\ldots\zeta_p\\ \tau_1\ldots\tau_{\alpha-1}t\tau_{\alpha+1}\ldots\tau_p\end{matrix}\middle|\lambda\right)d\arg t,\alpha = 1,2,\ldots,p. \qquad (10)$$

Разложим определитель B_n^p по элементам строки β :

$$B_n^p = \int\limits_{P^n}\sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+\beta}K(\zeta_\beta,\tau_\alpha)K\begin{pmatrix}\zeta_1\ldots\zeta_{\beta-1}\zeta_{\beta+1}\ldots\zeta_p t_1\ldots t_n\\ \tau_1\ldots\tau_{\alpha-1}\tau_{\alpha+1}\ldots\tau_p t_1\ldots t_n\end{pmatrix}d\theta\,(\theta_1\ldots\theta_n) +$$
$$\int\limits_{P^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\beta+p+i}K(\zeta_\beta,t_i)K\begin{pmatrix}\zeta_1\ldots\zeta_{\beta-1}\zeta_{\beta+1}\ldots\zeta_p t_1\ldots t_n\\ \tau_1\ldots\tau_p t_1\ldots t_{i-1}t_{i+1}\ldots t_n\end{pmatrix}d\theta\,(\theta_1\ldots\theta_n). \qquad (11)$$

Каждое слагаемое из первой суммы представим в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+\beta}K(\zeta_\beta,\tau_\alpha)B_n\begin{pmatrix}\zeta_1\ldots\zeta_{\beta-1}\zeta_{\beta+1}\ldots\zeta_p\\ \tau_1\ldots\tau_{\alpha-1}\tau_{\alpha+1}\ldots\tau_p\end{pmatrix}.$$

Во второй сумме сделаем замены, положив $t_i = t, t_{i+1} = t_{i,}, \ldots, t_n = t_{n-1}$, после чего слагаемые второй суммы будут выглядеть следующим образом:

$$(-1)^{\beta+p+i} K(\zeta_{\beta,} \tau_i) K\begin{pmatrix} \zeta_1 \ldots \zeta_{\beta-1} \zeta_{\beta+1} \ldots \zeta_p t_1 \ldots t_{i-1} t t_{i+1} \ldots t_{n-1} \\ \tau_1 \ldots \ldots \tau_p t_1 \ldots t_{i-1} t_{i+1} \ldots t_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Теперь перенесем строку t на место между строками $\beta - 1$ и $\beta + 1,$ т.е. совершим $i - 1 + p - \beta$ инверсий, что равнозначно умножению этого слагаемого на $(-1)^{i-1+p-\beta}$, следовательно, рассматриваемый член преобразован к виду

$$- K(\zeta_\beta, t) K\begin{pmatrix} \zeta_1 \ldots \zeta_{\beta-1} t \zeta_{\beta+1} \ldots \zeta_p t_1 \ldots t_{i-1} t_{i+1} \ldots t_{n-1} \\ \tau_1 \ldots \ldots \tau_p t_1 \ldots t_{i-1} t_{i+1} \ldots t_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Мы доказали, что рассматриваемое слагаемое в (11) можно представить в виде

$$- n \int_0^{2\pi} K(\zeta_\beta, t) d \arg t \int_{P^{n-1}} K\begin{pmatrix} \zeta_1 \ldots \zeta_{\beta-1} t \zeta_{\beta+1} \ldots \zeta_p t_1 \ldots t_{i-1} t_{i+1} \ldots t_{n-1} \\ \tau_1 \ldots \ldots \tau_p t_1 \ldots t_{i-1} t_{i+1} \ldots t_{n-1} \end{pmatrix} d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} \quad . \qquad (12)$$

Заменяя в (12) значение интеграла по P^{n-1} на B^p_{n-1}, имеем

$$- n \int_0^{2\pi} K(\tau_\beta, t) B_{n-1}\begin{pmatrix} \zeta_1 \ldots \zeta_{\beta-1} t \zeta_{\beta+1} \ldots \zeta_p \\ \pi_1 \ldots \ldots \tau_p \end{pmatrix} d \arg t B_n \begin{pmatrix} \zeta_1 \ldots \zeta_p \\ \tau_1 \ldots \tau_p \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} K(\zeta_\beta, \tau_\alpha) B_{n-1}\begin{pmatrix} \zeta_1 \ldots \zeta_{\beta-1} t \zeta_{\beta+1} \ldots \zeta_p \\ \tau_1 \ldots \tau_{\alpha-1} \tau_{\alpha+1} \ldots \tau_p \end{pmatrix} - n \int_0^{2\pi} K(\zeta_\beta, t) B_{n-1}\begin{pmatrix} \zeta_1 \ldots \zeta_{\beta-1} t \zeta_{\beta+1} \ldots \zeta_p \\ \tau_1 \ldots \ldots \tau_p \end{pmatrix} d \arg t. \qquad (13)$$

Умножив (13) на $\dfrac{(-1)^n \lambda^{n+p-1}}{n!}$ и суммировав его по n, получим (9).

Разлагая определитель B^p_n по столбцу α и рассуждая подобным же образом, получим и второе равенство теоремы.

ТЕОРЕМА 3.

$$(-1)^{p-1} D^{(p)}(\lambda) = \int_{P^p} D\left(\begin{matrix} t_1 \ldots t_p \\ t_1 \ldots t_p \end{matrix} \middle| \lambda \right) d\theta\, (\theta_1 \ldots \theta_p) \,. \qquad (14)$$

Доказательство. Положив в первой из формул (6)

$$d_n = \int_{P^n} K\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_p \\ t_1 \ldots t_p \end{pmatrix} d\theta\, (\theta_1 \ldots \theta_n),$$

запишем ее так: $D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \lambda^n}{n!} d_n,$ следовательно,

$$d_{n+p} = \int_{P^{n+p}} K\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_n \ldots t_{n+p} \\ t_1 \ldots t_n \ldots t_{n+p} \end{pmatrix} d\tau =$$

$$\int_{P^p} d\arg\tau_1 \dots d\arg\tau_p \int_{P^n} K\begin{pmatrix}\tau_1\dots\tau_p t_1\dots t_n\\ \tau_1\dots\tau_p t_1\dots t_n\end{pmatrix} d\theta\,(\theta_1\dots\theta_n) =$$

$$= \int_{P^p} B_n\begin{pmatrix}\tau_1\dots\tau_p\\ \tau_1\dots\tau_p\end{pmatrix} d\arg\tau_1\dots d\arg\tau_p .$$

Подставляя выведенные значения коэффициентов в ряд, выражающий $D^{(p)}$, получим

$$D^{(p)}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}\lambda^n}{n!}\int_{P^p} B_n\begin{pmatrix}\tau_1\dots\tau_p\\ \tau_1\dots\tau_p\end{pmatrix} d\arg\tau_1\dots d\arg\tau_n$$

Из этой формулы, используя определение D_p, имеем

$$(-1)^{p-1}\lambda^{p-1}D^{(p)}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}\lambda^n}{n!}\int_{P^p} B_n\begin{pmatrix}\tau_1\dots\tau_p\\ \tau_1\dots\tau_p\end{pmatrix} d\arg\tau_1\dots d\arg\tau_n =$$

$$\int_{P^p} D\left(\begin{matrix}t_1\dots t_p\\ t_1\dots t_p\end{matrix}\middle|\lambda\right)d\tau .$$

Теорема доказана.

Число R назовем рангом λ, если

$$D(\lambda) \equiv D(\zeta,\tau,\lambda) \equiv D\left(\begin{matrix}\zeta_1\zeta_2\\ \tau_1\tau_2\end{matrix}\middle|\lambda\right) \equiv D\left(\begin{matrix}\zeta_1\dots\zeta_{R-1}\\ \tau_1\dots\tau_{R-1}\end{matrix}\middle|\lambda\right) \equiv 0,$$

$$D\left(\begin{matrix}\zeta_1\dots\zeta_R\\ \tau_1\dots\tau_R\end{matrix}\middle|\lambda\right) \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 4. Ранг λ не превосходит его кратности как корня $D(\lambda)$.

Доказательство. Пусть λ будет корнем $D(\lambda)$ кратности k. Тогда

$$D(\lambda) = D'(\lambda) = \dots = D^{(k-1)}(\lambda) = 0, D^{(k)}(\lambda) \neq 0.$$

Поэтому

$$\int_{P^k} D\left(\begin{matrix}t_1\dots t_k\\ t_1\dots t_k\end{matrix}\middle|\lambda\right)d\theta\,(\theta_1\dots\theta_k) = (-1)^k\lambda^{k-1}D^{(k)}(\lambda) \neq 0.$$

Это означает, что существует набор таких $\zeta_1^\bullet\dots\zeta_k^\bullet\tau_1^\bullet\dots\tau_k^\bullet$, при которых $D^{(k)} \neq 0$.

Обозначая теперь через R наименьшее число, обрывающее цепочку

$$D(\lambda) \equiv D(\zeta,\tau) \equiv \dots \equiv D\left(\begin{matrix}\zeta_1\dots\zeta_{R-1}\\ \tau_1\dots\tau_{R-1}\end{matrix}\middle|\lambda\right) \equiv 0, \qquad (15)$$

получим утверждение теоремы.

Следствие. Из равенств (15) следует существование $\zeta^\bullet,\tau^\bullet \in C^R$, таких что

$$D(\zeta^\bullet,\tau^\bullet) \neq 0,\ \text{а}\ D\left(\begin{matrix}\zeta_1^\bullet\dots\zeta_{\beta-1}^\bullet\zeta_{\beta+1}^\bullet\dots\zeta_R^\bullet\\ \tau_1^\bullet\dots\tau_{\alpha-1}^\bullet\tau_{\alpha+1}^\bullet\dots\tau_R^\bullet\end{matrix}\middle|\lambda\right) = 0. \qquad (16)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть число λ имеет ранг R и является корнем кратности к уравнению $D(\lambda)=0$. Тогда любое решение φ уравнения

$$\varphi(\zeta) = \lambda \int_0^{2\pi} K(\zeta, t)\varphi(t) d \arg t \qquad (17)$$

можно представить в виде

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{R} C_k \frac{D\begin{pmatrix} \zeta_1^{\bullet} \ldots \zeta_{k-1}^{\bullet} \zeta \zeta_{k+1}^{\bullet} \ldots \zeta_R^{\bullet} \\ \tau_1^{\bullet} \ldots\ldots \tau_R^{\bullet} \end{pmatrix}\lambda}{D_R(\zeta^{\bullet}, \tau^{\bullet})}. \qquad (18)$$

Здесь $C_k \in C$, а $\zeta_j^{\bullet}, \tau_j^{\bullet}$ - некоторые комплексные числа, по модулю равные единице, независящие от φ, а $R \le \kappa$.

Доказательство теоремы дословно повторяет соответствующее рассуждение, приведенное в [6].

ТЕОРЕМА 6. Пусть λ^2 , наибольший положительный корень определителя Фредгольма $D(\lambda)$, имеет кратность к. Тогда существуют $2R, R \le \kappa$ комплексных чисел $C_1^1, C_2^1, \ldots, C_R^1$ и $C_1^2, C_2^2, \ldots, C_R^2$, таких что экстремальную функцию можно записать в виде

$$f(t) = t \sum_{k=1}^{R} C_k^1 \varphi_k(t) \sum_{k=1}^{R} C_k^2 \varphi_k(t), t \in T \ . \qquad (19)$$

Здесь $\varphi_k \in \Lambda_\alpha \cap H^\infty$ - аналитические функции, выражаемые через миноры Фредгольма.

Верно и обратное утверждение. Нормированная функция f из (19) является экстремальной для функционала (1).

Доказательство. Действительно, на основании теорем I, III функцию f можно представить в виде произведения функций $f(t) = t\Phi(t)\Psi(t), \Phi, \Psi \in H_2$, каждая из которых является решением Фредгольмого уравнения $Y = \dfrac{\lambda^2}{2\pi i} T(Y)$, ядро которого имеет слабую особенность. Следовательно, по теоремам 4 и 5 существуют натуральное число R (ранг уравнения Фредгольма) и собственные функции, выражаемые через миноры Фредгольма, и 2R комплексных чисел $C_1^1, C_2^1, \ldots, C_R^1$ и $C_1^2, C_2^2, \ldots, C_R^2$, таких что выполняется:

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{R} C_k^1 \varphi_k(t) ;$$

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{R} C_k^2 \varphi_k(t) .$$

Отсюда и следует формула (19).

Обратное утверждение выводим из теоремы 5 и теоремы IV. Теорема доказана.

Таким образом, в статье доказано, что экстремальная функция упомянутой выше задачи имеет следующий вид:

$$f(t) = t\sum_{k=1}^{R} C_k^1 \varphi_k(t) \sum_{k=1}^{R} C_k^2 \varphi_k(t), |t| = 1.$$

Библиографический список

1. *Рябых В.Г.* Необходимое и достаточное условие существования линейного функционала над H1./ В.Г. Рябых // Сиб. мат. журнал. - 2007. - Т.48. - №6. - С.1351-1360.

2. *Рябых В.Г.* Норма линейного функционала в пространстве H1. / В.Г.Рябых, Г.Ю.Рябых // Вестник Таганрогского государственного педагогического института. – 2008. - №1. - С.59-64.

3. *Carleson L., Jacobs S.* Best uniform approximation by analytic function Arciv Math. 1972, 10, 219-229 p.

4. *Хавинсон С.Я.* Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различных обобщений: учеб. пособие для ФПК / С.Я. Хавинсон. - М.: МИСИ, 1981. - 92 с.

5. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. / Дж. Гарнетт. - М.: Мир, 1984. - 469 с.

6. *Привалов И.И.* Интегральные уравнения. / И.И. Привалов. / ОНТИ. - М.-Л., 1935. - 248 с.

Материал поступил в редакцию 10.02.09.

V.G.RYABYKH, G.Y.RYABYKH

A PRESENTATION OF EXTREMAL FUNCTIONS IN THE EXPLICIT FORM FOR THE WIDE CLASS OF LINEAR FUNCTIONALS ON H_1 - SPACE

In this work extremal functions for the general class of functionals above Hardy space H_1 was founded in the explicitly form.

Linear functional $l(x) \in H_1^*$, which is given by the form

$$l(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\left(e^{i\theta}\right)\overline{\omega}\left(e^{i\theta}\right)d\theta \ , \ x \in H_1, \ x(0) = 0 \ ,$$

where $\omega(z) \in \mathrm{Lip}\alpha \cap H_\infty$.

This article proves that the extremal function of the above-mentioned task can be presented in the following form:

$$f(t) = t \cdot \sum_{k=1}^{R} C_k^1 \varphi_k(t) \sum_{k=1}^{R} C_k^2 \varphi_k(t) \ , \ |t| = 1 \ .$$

where $R \le \kappa$, κ - order of the largest positive root of the Fredholm`s determinant $D(\lambda)$, $C_1^1$, $C_2^1$, … , $C_R^1$ and $C_1^2$, $C_2^2$, … , $C_R^2$ - certain complex numbers, and $\varphi_k \in \mathrm{Lip}\alpha \cap H_\infty$ - functions, defined in the Fedholm`s minor form for integral equation

$$Y(\xi) = \frac{\lambda^2}{2\pi i}\int_{|t|=1} \overline{\omega}(t)\frac{\omega(t) - \omega(\xi)}{t - \xi} \mathrm{Y}(t)\,dt \ , \ |\xi| = 1 \ .$$

РЯБЫХ Владимир Георгиевич (р.1937), доцент (1969) кафедры «Теория функций и функциональный анализ» Южного федерального университета,

кандидат физико-математических наук (1966). Окончил Ростовский государственный университет (1961).
Научные интересы - теория пространств Бергмана, теория пространств Харди, приближение случайных процессов линейными агрегатами.
Опубликовал более 60 научных статей.
ryabch@aaanet.ru

РЯБЫХ Галина Юрьевна, заведующая кафедрой «Математика» ДГТУ, кандидат физико-математических наук (1981), доцент (1985). Окончила Ростовский государственный университет (1976).
Научные интересы - интегральные операторы с разностным ядром в пространствах с весом, проблемы звукоизлучения в процессах резания.
Имеет более 40 научных статей.
ryabch@aaanet.ru